



应用随机过程

张波 商豪 邓军

中国人民大学 统计学院

1/28



GoBack

FullScreen

Close

Quit



第2章 随机过程的基本概念与类型

- 2.1 基本概念
- 2.2 有限维分布与Kolmogorov定理
- 2.3 随机过程的基本类型

2/28



GoBack

FullScreen

Close

Quit



§2.1 基本概念

定义 2.1.1 随机过程是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一族随机变量 $\{X(t), t \in T\}$, 其中 t 是参数, 它属于某个指标集 T , T 称为参数集.

注:

- 当 $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ 时称之为随机序列或时间序列.
- 随机过程 $\{X(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$ 是定义在 $T \times \Omega$ 上的二元函数.
- 参数空间 T 是向量集合时, 随机过程 $\{X(t), v \in T\}$ 称为随机场.

随机过程的分类: (1) $X(t)$ 表示系统在时刻 t 所处的状态.



(2) $X(t)$ 的所有可能状态构成的集合为状态空间，记为 S .

(3) 依照状态空间可分为连续状态和离散状态；

(4) 依照参数集，可分为离散参数过程和连续参数过程.

注：一般如果不作说明都认为状态空间是实数集 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}$ 的子集.

例 2.1.1 （随机游动）一个醉汉在路上行走，以概率 p 前进一步，以概率 $1 - p$ 后退一步（假定其步长相同）. 以 $X(t)$ 记他在路上的位置，则 $X(t)$ 就是直线上的随机游动.

例 2.1.2 （Brown运动）英国植物学家Brown注意到

4/28



GoBack

FullScreen

Close

Quit



飘浮在液面上的微小粒子不断进行无规则的运动, 这种运动后来称为Brown运动. 它是分子大量随机碰撞的结果. 若记 $(X(t), Y(t))$ 为粒子在平面坐标上的位置, 则它是平面上的Brown运动.

例 2.1.3 (排队模型) 顾客来到服务站要求服务. 当服务站中的服务员都忙碌, 即服务员都在为别的顾客服务时, 来的顾客就要排队等候. 顾客的到来、每个顾客所需的服务时间都是随机的, 所以如果用 $X(t)$ 表示 t 时刻的队长, 用 $Y(t)$ 表示 t 时刻到来的顾客所需的等待时间, 则 $\{X(t), t \in T\}, \{Y(t), t \in T\}$ 都是随机过程.



§2.2 有限维分布与Kolmogorov定理

定义 2.2.1 对任意有限个 $t_1, \dots, t_n \in T$, 定义随机过程的 n 维分布 $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$:

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n).$$

随机过程的所有的一维分布, 二维分布, $\dots$, n 维分布等等的全体

$$\{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n), t_1, \dots, t_n \in T, n \geq 1\}$$

称为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的有限分布族.

注: 知道了随机过程的有限维分布就知道了 $\{X(t), t \in T\}$ 中任意 n 个随机变量的联合分布. 也就掌握了这些随机变量之间的相互依赖关系.



分布族的性质: (1) 对称性

对 $(1, 2, \dots, n)$ 的任一排列 $(j_1, j_2, \dots, j_n)$, 有

$$\begin{aligned} & F_{t_{j_1}, \dots, t_{j_n}}(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) \\ &= P(X(t_{j_1}) \leq x_{j_1}, \dots, X(t_{j_n}) \leq x_{j_n}) \\ &= P(X(t_1) \leq x_{t_1}, \dots, X(t_n) \leq x_{t_n}) \\ &= F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

(2) 相容性

对于 $m < n$, 有

$$F_{t_1, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_m, \infty, \dots, \infty) = F_{t_1, \dots, t_m}(x_1, \dots, x_m).$$

定理 2.2.1 设分布函数族 $\{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n), t_1, \dots, t_n \in T, n \geq 1\}$ 满足上述的对称性和相容性, 则必存在一个随机



过程 $\{X(t), t \in T\}$, 使

$$\{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n), t_1, \dots, t_n \in T, n \geq 1\}$$

恰好是 $\{X(t), t \in T\}$ 的有限维分布族.

注: 随机过程的有限维分布函数族是随机过程概率特征的完整描述,它是证明随机过程存在性的有力工具.但是在实际问题中,要知道随机过程的全部有限维分布是不可能的,因此,人们想到了用随机过程的某些数字特征来刻画随机过程.

定义 2.2.2 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一随机过程.

(1) 称 $X(t)$ 的期望 $\mu_X(t) = E[X(t)]$ 为过程的均值函数(如果存在的话).

(2) 如果 $\forall t \in T, E[X^2(t)]$ 存在, 则称随机过程 $\{X(t), t \in$



$T\}$ 为二阶矩过程.

此时, 称函数 $\gamma(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu_X(t_1))(X(t_2) - \mu_X(t_2))]$, $t_1, t_2 \in T$

为过程的协方差函数; 称 $Var[X(t)] = \gamma(t, t)$ 为过程的方差函数; 称 $R_X(s, t) = E[X(s)X(t)]$, $s, t \in T$ 为自相关函数.

由Schwartz不等式知, 二阶矩过程的协方差函数和自相关函数存在, 且有 $\gamma_X(s, t) = R_X(s, t) - \mu_X(s)\mu_X(t)$.

例 2.2.1 $X(t) = X_0 + tV, a \leq t \leq b$, 其中 X_0 和 V 是相互独立且服从 $N(0, 1)$ 分布的随机变量.

注: 易知 $X(t)$ 服从正态分布, 且 $X(t_1), \dots, X(t_n)$ 也是 n 维正态分布. 所以只要知道它的一阶矩和二阶矩就完全确定了

它的分布.

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = E(X_0 + tV) = EX_0 + tEV = 0$$

$$\begin{aligned}\gamma(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = E[(X_0 + t_1V)(X_0 + t_2V)] \\ &= E[X_0^2] + t_1t_2E[V^2] = 1 + t_1t_2.\end{aligned}$$



10/28



GoBack

FullScreen

Close

Quit



§2.3 随机过程的基本类型

§2.3.1 平稳过程

定义 2.3.1 如果随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 对任意的 $t_1, \dots, t_n \in T$ 和任意的 h (使得 $t_i + h \in T$)有,
 $(X(t_1 + h), \dots, X(t_n + h))$ 与 $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ 具有相同的联合分布, 记为

$$(X(t_1 + h), \dots, X(t_n + h)) \stackrel{d}{=} (X(t_1), \dots, X(t_n)) \quad (2.3.1)$$

则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为严平稳的.

定义 2.3.2 如果随机过程 $X(t)$ 的所有二阶矩都存在, 并且均值函数 $E[X(t)] = \mu$, 协方差函数 $\gamma(t, s)$ 只与时间差 $t - s$ 有关, 则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为宽平稳过程或二阶平稳过程.



注:

- 对于宽平稳过程, 由于 $\gamma(s, t) = \gamma(0, t - s), s, t \in \mathbb{R}$, 可记为 $\gamma(t - s)$;
- $\gamma(t)$ 为偶函数, 且 $\gamma(0) = \text{var}(X(t)), |\gamma(\tau)| \leq \gamma(0)$;
- $\gamma(\tau)$ 具有非负定性, 即对任意时刻 t_k 和实数 $a_k, k = 1, 2, \dots, N$, 有

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \gamma(t_i - t_j) \geq 0.$$

当参数 t 仅取整数值 $0, \pm 1, \pm 2 \dots$ 或 $0, 1, 2 \dots$ 时, 称平稳过程为平稳序列.

例 2.3.1 (平稳白噪声序列) 设 $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ 为一系列两两互不相关的随机变量序列, 满足 $EX_n = 0, n =$



$0, 1, 2, \dots$, 且

$$EX_m X_n = \begin{cases} 0, & \text{当 } m \neq n \\ \sigma^2, & \text{当 } m = n \end{cases}$$

则白噪声序列 $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ 为平稳的. 这是因为协方差函数 $cov(X_n, X_m) = E(X_n X_m)$ 只与 $m - n$ 有关.

例 2.3.2 (滑动平均序列) 设 $\{\varepsilon_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 为一列互不相关的且有相同均值 m 和方差 σ^2 的随机变量序列. 设 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 为任意 k 个实数. 考虑如下定义序列的平稳性:

$$X_n = a_1 \varepsilon_n + a_2 \varepsilon_{n-1} + \dots + a_k \varepsilon_{n-k+1}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

容易看出

$$EX_n = m(a_1 + \dots + a_k).$$



令 $\xi_j = \varepsilon_j - m$, 则由 ε_j 的两两互不相关性知, 协方差函数

$$\begin{aligned}\gamma(n+\tau, n) &= E[(X_n - m(a_1 + \cdots + a_k))(X_{n+\tau} - m(a_1 + \cdots + a_k))] \\ &= E[(a_1 \xi_n + \cdots + a_k \xi_{n-k+1})(a_1 \xi_{n+\tau} + \cdots + a_k \xi_{n+\tau-k+1})] \\ &= \begin{cases} \sigma^2(a_k a_{k-\tau} + \cdots + a_{\tau+1} a_1), & \text{若 } 0 \leq \tau \leq k-1, \\ 0, & \text{若 } \tau \geq k, \end{cases}\end{aligned}$$

即协方差函数仅与时间间隔 τ 有关. 故 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 为平稳序列.

考虑如下两个特殊平稳过程:

设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为独立同分布随机变量序列, $E[X_n^2] < \infty, E[X_n] = \mu, n = 0, 1, 2, \cdots$.

$\{Y_n = Y, n \geq 0\}$, 其中 Y 是随机变量, $E[Y^2] < \infty$.

可以用这两个过程来阐述不同平稳过程之间的差异. 对



过程 $\{X_n\}$ 而言, 由大数定律知,

$$\frac{1}{n}(X_0 + X_1 + \cdots + X_{n-1})$$

以概率1收敛于常数 m . 但对于过程 $\{Y_n\}$ 而言

$$\frac{1}{n}(Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_{n-1}) = Y$$

即经对时间的平均后, 随机性没发生任何改变. 于是自然产生这样的问题: 在何种条件下, 平稳过程对时间的平均值可以等于过程的均值?

对于平稳过程 $\{X_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$, 重要的是确定它的均值 μ 和它的协方差函数 $\gamma(\tau)$. 由于 $E[X_t] = \mu$, 为估计 μ , 就必须对随机过程 $\{X_n\}$ 作大量观察. 以 $X_j(t)$ 记第 j 次观察中时刻 t 的值, $j = 1, 2, \cdots, n$. 由大数定律知, 可以用 $\hat{\mu} = \frac{1}{n}(X_1(t) + \cdots + X_n(t))$ 来估计 μ . 同样, 为了估计协方差



函数 $\gamma(\tau)$, 也可以用

$$\hat{\gamma}(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k(t + \tau) - \hat{\mu})(X_k(t) - \hat{\mu})$$

来估计.然而对随机过程作多次观察一般来说很难做到, 容易的是作一次观察, 获得一条样本路径, 我们希望由这一次观察来估计 μ 和 $\gamma(\tau)$.对于一般的随机过程这是不可能的, 但是对于平稳过程, 只要加上一些条件, 就可以从一次观察中得到 μ 和 $\gamma(\tau)$ 的较好的估计, 这就是遍历性定理.

定义 2.3.3 设 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 为一平稳过程, 若

$$\overline{X} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt = m \quad (2.3.2)$$



或当参数空间为 $T = \mathbb{Z}$ (整数集)时,

$$\overline{X} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N X(k) = m$$

则称 $\{X(t), t \in T\}$ 的均值有遍历性.

注: 这里的极限是指在均方意义下的极限, 即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt - m \right|^2 \right] = 0.$$

$$\overline{\gamma}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (X(t) - m)(X(t + \tau) - m) dt = \gamma(\tau)$$

或当参数空间为 $T = \mathbb{Z}$ 时,

$$\overline{\gamma}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N (X(k) - m)(X(k + \tau) - m) = \gamma(\tau)$$



GoBack

FullScreen

Close

Quit



则称 $\{X(t), t \in T\}$ 的协方差有遍历性.

若随机过程（或随机序列）的均值和协方差函数都具有遍历性，则称此随机过程有遍历性.

注：如果 t 只取非负实数（非负整数）时，相应的积分和求和就限制在 $[0, \infty)$ 上. 如相应于上述定义改为：

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt = m$$

或

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N X(k) = m.$$

由遍历性的定义式，自然提出问题：极限是否存在？如果存在，它是随机变量的极限. 那么在什么条件下它能等于常数呢？



GoBack

FullScreen

Close

Quit



定理 2.3.1 (均值遍历性定理)

(1) 设 $\{X_t, -\infty < t < \infty\}$ 是平稳过程, 则 $\{X_t, -\infty < t < \infty\}$ 的均值有遍历性的充分必要条件是

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) \gamma(\tau) d\tau = 0.$$

(2) 设 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 是平稳序列, 其均值函数为 μ , 协方差函数为 $\gamma(\tau)$, 则 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 的均值有遍历性的充分必要条件是

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} \gamma(\tau) = 0.$$

证明: 由于证明的思路相同, 这里只证明连续时间的均值遍历性定理. 首先, 计算 $\bar{X}$ 的均值和方差. 记

$$\bar{X}_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt,$$



则有

$$E\bar{X} = E \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{X}_T = \lim_{T \rightarrow \infty} E\bar{X}_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T EX(t)dt = m$$

进而

$$\begin{aligned} Var(\bar{X}) &= E[(\bar{X} - E\bar{X})^2] \\ &= E \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T (X(t) - m)dt \right]^2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} E \left[\int_{-T}^T (X(t) - m)dt \right]^2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T E[(X(t) - m)(X(s) - m)]dtds \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \gamma(t - s)dtds \end{aligned}$$



在上述积分中，做变换

$$\begin{cases} \tau = t - s \\ v = t + s \end{cases}$$

则变换的Jacobi行列式值为

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}$$

积分区域变换为顶点分别在 τ 轴和 v 轴上的菱形区域

$$D : -2T \leq \tau \pm v \leq 2T.$$

由于 $\gamma(\tau)$ 是偶函数，故 $Var(\bar{X})$ 等于

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \cdot \frac{1}{2} \iint_D \gamma(\tau) d\tau dv$$



$$\begin{aligned} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{8T^2} \int_{-2T}^{2T} \gamma(\tau) d\tau \int_{-(2T-|\tau|)}^{2T-|\tau|} dv \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-2T}^{2T} \gamma(\tau)(2T - |\tau|) d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T^2} \int_0^{2T} \gamma(\tau)(2T - \tau) d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \gamma(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) d\tau. \end{aligned}$$

故关于均值的遍历性定理就化为上式极限是否趋于零的问题. 于是由均方收敛的定义知这确实是等价的. ■

推论 2.3.1 若 $\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\tau)| d\tau < \infty$, 则均值遍历性定理成立.

证明: 由于当 $0 \leq \tau \leq 2T$ 时, $|(1 - \tau/2T)\gamma(\tau)| \leq$



GoBack

FullScreen

Close

Quit



$|\gamma(\tau)|$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \left| \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \gamma(\tau) d\tau \right| &\leq \frac{1}{T} \int_0^{2T} |\gamma(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^{\infty} |\gamma(\tau)| d\tau \rightarrow 0. \end{aligned}$$

推论 2.3.2 对于平稳序列而言, 若 $\gamma(\tau) \rightarrow 0 (\tau \rightarrow \infty)$, 则均值遍历性定理成立.

证明: 因为当 $\tau \rightarrow \infty$ 时, $\gamma(\tau) \rightarrow 0$, 故由Stoltz定理知

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} \gamma(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \gamma(N-1) = 0$$

从而序列的均值有遍历性.

协方差函数遍历性定理:

定理 2.3.2 (协方差函数遍历性定理)



设 $\{X_t, -\infty < t < \infty\}$ 是平稳过程, 其均值函数为零, 则协方差函数有遍历性的充分必要条件是

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau_1}{2T}\right) (B(\tau_1) - \gamma^2(\tau)) d\tau_1 = 0$$

其中 $B(\tau_1) = E[X(t + \tau + \tau_1)X(t + \tau_1)X(t + \tau)X(t)]$.

注: 对于平稳过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的协方差函数 $\gamma(\tau)$ 的遍历性定理, 可以考虑随机过程 $\{Y_\tau(t), -\infty < t < \infty\}$, 其中

$$Y_\tau(t) = (X(t + \tau) - m)(X(t) - m),$$

则 $E[Y_\tau(t)] = \gamma(\tau)$. 由定理的证明过程可见, 均值具有遍历性等价于 $\text{var}(\bar{X}) = 0$. 因此可以类推协方差函数 $\gamma(\tau)$ 具有遍历性等价于 $\text{Var}(\bar{\gamma}(\tau)) = 0$.

例 2.3.3 设 $X(t) = a \cos(\omega t + \Theta)$, $\Theta \sim U(0, 2\pi)$, $\omega \neq 0$, 则 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 的均值有遍历性.



证明: 其均值函数为: $EX(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a \cos(\omega t + \theta) d\theta = 0$, 其协方差函数为:

$$\begin{aligned} E[X(t + \tau)X(t)] &= E[a^2 \cos(\omega(t + \tau) + \Theta) \cos(\omega t + \Theta)] \\ &= \frac{a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos((t + \tau)\omega + \theta) \cos(t\omega + \theta) d\theta \\ &= \frac{a^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} [\cos((2t + \tau)\omega + 2\theta) + \cos \tau\omega] d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \cos \tau\omega \end{aligned}$$

所以 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 是平稳过程. 又因为

$$\frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) \gamma(\tau) d\tau = \frac{a^2}{2T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) \cos \omega \tau d\tau$$



$$= \frac{a^2}{2T} \cdot \frac{\sin 2T\omega}{\omega} - \frac{a^2}{4T^2} \int_0^{2T} \tau \cos \omega \tau d\tau.$$

由微分第二中值定理可知, 存在 $\xi \in (0, 2T)$, 使得

$$\left| \int_0^{2T} \tau \cos \omega \tau d\tau \right| = \left| 2T \int_{\xi}^{2T} \cos \omega \tau d\tau \right| \leq \frac{4T}{\omega},$$

从而, 令 $T \rightarrow \infty$, 得

$$\frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) \gamma(\tau) d\tau \rightarrow 0.$$

故均值遍历性成立.

§2.3.2 独立增量过程

定义 2.3.4 如果对任何 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T, t_1 < t_2 < \dots < t_n$ 随机变量 $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ 是相互独立的, 则称 $X(t)$ 为独立增量过程. 如果对任何 $t_1, t_2,$



有 $X(t_1 + h) - X(t_1) \stackrel{d}{=} X(t_2 + h) - X(t_2)$, 则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为是平稳增量过程. 兼有独立增量和平稳增量的过程称为平稳独立增量的过程.

随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的特征函数为 $\psi_{X(t)}(a) = E[e^{iaX(t)}]$, 我们有如下定理

定理 2.3.3 假设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个独立增量过程, 则 $X(t)$ 具有平稳增量的充分必要条件是: 其特征函数具有可乘性, 即

$$\psi_{X(t+s)}(a) = \psi_{X(t)}(a)\psi_{X(s)}(a)$$



证：必要性显然，以下证明充分性。由独立增量性有

$$\begin{aligned}\psi_{X(t)}(a)\psi_{X(s)}(a) &= \psi_{X(t+s)}(a) \\ &= E[e^{iaX(t+s)}] \\ &= E\{e^{ia[X(t+s)-X(s)]}\}E[e^{iaX(s)}] \\ &= E\{e^{ia[X(t+s)-X(s)]}\}\psi_{X(s)}(a)\end{aligned}$$

由此可得

$$E\{e^{ia[X(t+s)-X(s)]}\} = \psi_{X(t)}(a) = E[e^{iaX(t)}]$$

即该过程具有平稳的增量。

注：平稳独立增量过程的均值函数是时间 t 的线性函数。本书后面将要介绍的Poisson过程和Brown运动都是这类过程。这两类过程是随机过程理论中的两块最重要的基石。